

Ο Αλγόριθμος της Simplex



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Τα βήματα του αλγορίθμου συνοψίζονται σε 5 βήματα.

Τα βήματα του αλγορίθμου συνοψίζονται σε 5 βήματα.

- Αρχικοποίηση : Επέλεξε έναν αντιστρέψιμο πίνακα B ($m \times m$) έτσι ώστε $x_B = B^{-1}b \geq 0$, $N = \{j : a_j \notin B\}$ και $x_N = 0$

Τα βήματα του αλγορίθμου συνοψίζονται σε ~~5 βήματα~~.

- Αρχικοποίηση : Επέλεξε έναν αντιστρέψιμο πίνακα B ($m \times m$) έτσι ώστε $x_B = B^{-1}b \geq 0$, $N = \{j : a_j \notin B\}$ και $x_N = 0$
- **Βήμα 1**
Υπολόγισε το διάνυσμα γραμμή $y = c_B B^{-1}$

Τα βήματα του αλγορίθμου συνοψίζονται σε ~~5 βήματα~~.

- Αρχικοποίηση : Επέλεξε έναν αντιστρέψιμο πίνακα B ($m \times m$) έτσι ώστε $x_B = B^{-1}b \geq 0$, $N = \{j : a_j \notin B\}$ και $x_N = 0$
- **Βήμα 1**
Υπολόγισε το διάνυσμα γραμμή $y = c_B B^{-1}$
- **Βήμα 2** (κριτήριο εισαγωγής)
Εάν $c_j \leq ya_j$ για κάθε $j \in N$
 $z^* = yb$ και $x^* = [x_B, x_N]$
Επέστρεψε "Βέλτιστη Λύση"
Διαφορετικά επέλεξε τυχαίο $j \in N$ όπου $c_j > ya_j$

Τα βήματα του αλγορίθμου συνοψίζονται σε ~~5~~ βήματα.

- Αρχικοποίηση : Επέλεξε έναν αντιστρέψιμο πίνακα B ($m \times m$) έτσι ώστε $x_B = B^{-1}b \geq 0$, $N = \{j : a_j \notin B\}$ και $x_N = 0$
- **Βήμα 1**
Υπολόγισε το διάνυσμα γραμμή $y = c_B B^{-1}$
- **Βήμα 2** (κριτήριο εισαγωγής)
Εάν $c_j \leq y a_j$ για κάθε $j \in N$
 $z^* = y b$ και $x^* = [x_B, x_N]$
Επέστρεψε "Βέλτιστη Λύση"
Διαφορετικά επέλεξε τυχαίο $j \in N$ όπου $c_j > y a_j$
- **Βήμα 3**
Καθόρισε το διάνυσμα κολόνα ($m \times 1$) $d = B^{-1}a_j$

- **Βήμα 4**

Εάν $d_i \leq 0$ για κάθε $i \notin N$

Επέστρεψε "Συνάρτηση μη φραγμένη"

Διαφορετικά επέλεξε $i^* \notin N$ όπου $d_{i^*} > 0$ και $i^* = \arg \min_i \left(\frac{x_i}{d_i} \right)$

- **Βήμα 4**

Εάν $d_i \leq 0$ για κάθε $i \notin N$

Επέστρεψε "Συνάρτηση μη φραγμένη"

Διαφορετικά επέλεξε $i^* \notin N$ όπου $d_{i^*} > 0$ και $i^* = \arg \min_i (\frac{x_i}{d_i})$

- **Βήμα 5**

$x_j = 0$ για κάθε $j \in N - \{j^*\}$

$$x_B = x_B - \frac{x_{j^*}}{d_{j^*}} d \quad (x_k = x_k - \frac{x_{j^*}}{d_{j^*}} d_k \quad \forall k \notin N)$$

$$N = (N - \{j^*\}) \cup \{i^*\}, \quad B = (B - \{a_{j^*}\}) \cup \{a_{j^*}\}$$

$$Z = C_B X_B$$

- **Βήμα 4**

Εάν $d_i \leq 0$ για κάθε $i \notin N$

Επέστρεψε "Συνάρτηση μη φραγμένη"

Διαφορετικά επέλεξε $i^* \notin N$ όπου $d_{i^*} > 0$ και $i^* = \arg \min_i \left(\frac{x_i}{d_i} \right)$

- **Βήμα 5**

$x_j = 0$ για κάθε $j \in N - \{j\}$

$$x_B = x_B - \frac{x_{i^*}}{d_{i^*}} d \quad (x_k = x_k - \frac{x_{i^*}}{d_{i^*}} d_k \quad \forall k \notin N)$$

$$N = (N - \{j\}) \cup \{i^*\}, \quad B = (B - \{a_{i^*}\}) \cup \{a_j\}$$

$$Z = C_B X_B$$

- Επανέλαβε το **Βήμα 1**

Υπογραφή Συμβολαίων(Επίλυση με Πίνακες)

$$\begin{array}{llllll} \max z = & 8x_1 & + & 6x_2 & & \\ s.t. & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Υπογραφή Συμβολαίων(Επίλυση με Πίνακες)

$$\begin{array}{llllll} \max z = & 8x_1 & + & 6x_2 & & \\ s.t. & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Μορφή Πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αρχικοποίηση

$$\text{Θέτουμε } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{αντιστρέψιμος})$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$N = \{1, 2\}, \quad c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = c_B x_B = 0$$

- **Βήμα 1** (κριτήριο εισαγωγής)

$$y = c_B B^{-1} = 0$$

- **Βήμα 1** (κριτήριο εισαγωγής)

$$y = c_B B^{-1} = 0$$

- **Βήμα 2**

$$y\alpha_j = 0 \text{ για } j = 1, 2$$

$$c_1 = 4 \geq 0 = y\alpha_1$$

$$c_2 = 3 \geq 0 = y\alpha_2$$

Επιλέγουμε τυχαία $j = 1$

- **Βήμα 1** (κριτήριο εισαγωγής)

$$y = c_B B^{-1} = 0$$

- **Βήμα 2**

$$y a_j = 0 \text{ για } j = 1, 2$$

$$c_1 = 4 \geq 0 = y a_1$$

$$c_2 = 3 \geq 0 = y a_2$$

Επιλέγουμε τυχαία $j = 1$

- **Βήμα 3**

$$d = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 4** (κριτήριο εξαγωγής)

$$\frac{x_3}{a_3} = 6, \frac{x_4}{a_4} = 12 \text{ και } \frac{x_5}{a_5} = 18$$

$\Rightarrow$ η μεταβλητή $i^* = 3$ εξέρχεται από τη βάση

- **Βήμα 4** (κριτήριο εξαγωγής)

$$\frac{x_3}{a_3} = 6, \frac{x_4}{a_4} = 12 \text{ και } \frac{x_5}{a_5} = 18$$

$\Rightarrow$ η μεταβλητή $i^* = 3$ εξέρχεται από τη βάση

- **Βήμα 5**

$$x_2 = \frac{x_3}{a_3} = 6 \quad x_B = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \{2, 3\}, \quad B = \{1, 4, 5\},$$

$$x_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad c_B = [4 \quad 0 \quad 0], \quad z = c_B x_B = 24$$

- **Βήμα 1**

$$y = c_B B^{-1} \Leftrightarrow yB = c_B$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 1**

$$y = c_B B^{-1} \Leftrightarrow yB = c_B$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 2** (κριτήριο εισαγωγής)

$$ya_2 = \frac{12}{5}$$

$c_2 = 3 \geq \frac{12}{5} = ya_2$, η μεταβλητή x_2 εισέρχεται στη Βάση

- **Βήμα 1**

$$y = c_B B^{-1} \Leftrightarrow yB = c_B$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 2** (κριτήριο εισαγωγής)

$$y\alpha_2 = \frac{12}{5}$$

$c_2 = 3 \geq \frac{12}{5} = y\alpha_2$, η μεταβλητή x_2 εισέρχεται στη Βάση

- **Βήμα 3**

$$d = B^{-1}\alpha_2 \Leftrightarrow Bd = \alpha_2$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5d_1 = 3 \\ 2d_1 + d_4 = 3 \\ d_1 + d_5 = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow d = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{5}{5} \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 4** (κριτήριο εξαγωγής)

$$\frac{x_1}{a_1} = 10, \frac{x_4}{a_4} = \frac{20}{3} \text{ και } \frac{x_5}{a_5} = 5$$

$\Rightarrow$ η μεταβλητή $i^* = 5$ εξέρχεται από τη βάση

- **Βήμα 4** (κριτήριο εξαγωγής)

$$\frac{x_1}{a_1} = 10, \frac{x_4}{a_4} = \frac{20}{3} \text{ και } \frac{x_5}{a_5} = 5$$

$\Rightarrow$ η μεταβλητή $i^* = 5$ εξέρχεται από τη βάση

- **Βήμα 5**

$$x_2 = \frac{x_5}{a_5} = 5 \quad x_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \{3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 4\},$$

$$x_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c_B = [4 \quad 3 \quad 0], \quad z = c_B x_B = 27$$

- **Βήμα 1**

$$y = c_B B^{-1} \Leftrightarrow yB = c_B$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 3 \\ y_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 1**

$$y = c_B B^{-1} \Leftrightarrow yB = c_B$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 3 \\ y_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 2** (κριτήριο βελτιστότητας)

$$ya_3 = \frac{3}{4} > 0 = c_3$$

$$ya_5 = \frac{1}{4} > 0 = c_5$$

- **Βήμα 1**

$$y = c_B B^{-1} \Leftrightarrow yB = c_B$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 5y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 3 \\ y_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 2** (κριτήριο βελτιστότητας)

$$ya_3 = \frac{3}{4} > 0 = c_3$$

$$ya_5 = \frac{1}{4} > 0 = c_5$$

- Επέστρεψε "Βέλτιστη λύση" : $x_1^* = 3, x_2^* = 5$ και $z^* = 27$